Paradigmas de Projeto de Algoritmos*

Última alteração: 10 de Outubro de 2006

*Transparências elaboradas por Charles Ornelas, Leonardo Rocha, Leonardo Mata e Nivio Ziviani

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- indução,
- recursividade,
- algoritmos tentativa e erro,
- divisão e conquista,
- balanceamento,
- programação dinâmica,
- algoritmos gulosos,
- algoritmos aproximados.

Indução Matemática

- É útil para provar asserções sobre a correção e a eficiência de algoritmos.
- Consiste em inferir uma lei geral a partir de instâncias particulares.
- Seja T um teorema que que tenha como parâmetro um número natural n. Para provar que T é válido para todos os valores de n, basta provarmos que:
  1. T é válido para $n = 1$;
  2. Para todo $n > 1$, se T é válido para $n - 1$, então T é válido para n.
- A condição 1 é chamada de **passo base**.
- Provar a condição 2 é geralmente mais fácil que provar o teorema diretamente, uma vez que podemos usar a asserção de que T é válido para $n - 1$.
- Esta afirmativa é chamada de **hipótese de indução** ou **passo indutivo**
- As condições 1 e 2 implicam T válido para $n = 2$, o que junto com a condição 2 implica T também válido para $n = 3$, e assim por diante.

Exemplo de Indução Matemática

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$

- Para $n = 1$ a asserção é verdadeira, pois $S(1) = 1 = 1 \times (1 + 1)/2$ (passo base).
- Assumimos que a soma dos primeiros n números naturais $S(n)$ é $n(n + 1)/2$ (hipótese de indução).
- Pela definição de $S(n)$ sabemos que $S(n + 1) = S(n) + n + 1$.
- Usando a hipótese de indução, $S(n+1) = n(n+1)/2+n+1 = (n+1)(n+2)/2$, que é exatamente o que queremos provar.

Limite Superior de Equações de Recorrência

- A solução de uma equação de recorrência pode ser difícil de ser obtida.
- Nesses casos, pode ser mais fácil tentar adivinhar a solução ou chegar a um limite superior para a ordem de complexidade.
- Adivinhar a solução funciona bem quando estamos interessados apenas em um limite superior, ao invés da solução exata.
- Mostrar que um limite existe é mais fácil do que obter o limite.
- Ex.: $T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, \;\; T(2) = 1$, definida para valores de n que são potências de 2.
  - O objetivo é encontrar um limite superior na notação O, onde o lado direito da desigualdade representa o pior caso.

Indução Matemática para Resolver Equação de Recorrência

$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, \;\; T(2) = 1$, definida para valores de n que são potências de 2.

- Procuramos $f(n)$ tal que $T(n) = O(f(n))$, mas fazendo com que $f(n)$ seja o mais próximo possível da solução real para $T(n)$.
- Vamos considerar o palpite $f(n) = n^2$.
- Queremos provar que $T(n) = O(f(n))$ utilizando indução matemática em n.
- Passo base: $T(2) = 1 \leq f(2) = 4$.
- Passo de indução: provar que $T(n) \leq f(n)$ implica $T(2n) \leq f(2n)$.

$$\begin{aligned} T(2n) &\leq 2T(n) + 2n - 1, && \text{(def. da recorrência)} \\ &\leq 2n^2 + 2n - 1, && \text{(hipótese de indução)} \\ &< (2n)^2, \end{aligned}$$

que é exatamente o que queremos provar. Logo, $T(n) = O(n^2)$.

Indução Matemática para Resolver Equação de Recorrência

- Vamos tentar um palpite menor, $f(n) = cn$, para alguma constante c.

- Queremos provar que $T(n) \leq cn$ implica em $T(2n) \leq c2n$. Assim:

$$
\begin{aligned}
T(2n) &\leq 2T(n) + 2n - 1, && \text{(def. da recorrência)} \\
&\leq 2cn + 2n - 1, && \text{(hipótese de indução)} \\
&> c2n.
\end{aligned}
$$

- cn cresce mais lentamente que $T(n)$, pois $c2n = 2cn$ e não existe espaço para o valor $2n - 1$.

- Logo, $T(n)$ está entre cn e n^2.

Indução Matemática para Resolver Equação de Recorrência

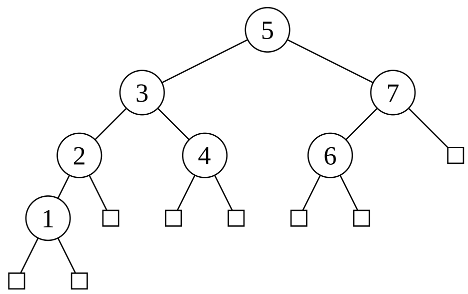
- Vamos então tentar $f(n) = n \log n$.
- Passo base: $T(2) < 2 \log 2$.
- Passo de indução: vamos assumir que $T(n) \leq n \log n$.
- Queremos mostrar que $T(2n) \leq 2n \log 2n$. Assim:

$$\begin{array}{rcll} T(2n) & \leq & 2T(n) + 2n - 1, & \text{(def. da recorrência)} \\ & \leq & 2n \log n + 2n - 1, & \text{(hipótese de indução)} \\ & < & 2n \log 2n, & \end{array}$$

- A diferença entre as fórmulas agora é de apenas 1.
- De fato, $T(n) = n \log n - n + 1$ é a solução exata de $T(n) = 2T(n/2) + n - 1, \;\; T(1) = 0$, que descreve o comportamento do algoritmo de ordenação *Mergesort*.

Recursividade

- Um método que chama a si mesmo, direta ou indiretamente, é dito **recursivo**.
- Recursividade permite descrever algoritmos de forma mais clara e concisa, especialmente problemas recursivos por natureza ou que utilizam estruturas recursivas.
- Ex.: árvore binária de pesquisa:
  - Todos os registros com chaves menores estão na subárvore esquerda;
  - Todos os registros com chaves maiores estão na subárvore direita.




```
package cap2;
public class ArvoreBinaria {
  private static class No {
    Object reg;
    No esq, dir;
  }
  private No raiz;
}
```

Recursividade

- Algoritmo para percorrer todos os registros em ordem de **caminhamento central**:
  1. caminha na subárvore esquerda na ordem central;
  2. visita a raiz;
  3. caminha na subárvore direita na ordem central.
- No caminhamento central, os nós são visitados em ordem lexicográfica das chaves.

```
private void central (No p) {
  if (p != null) {
    central (p.esq);
    System.out.println (p.reg.toString());
    central (p.dir);
  }
}
```

Implementação de Recursividade

- Usa-se uma **pilha** para armazenar os dados usados em cada chamada de um procedimento que ainda não terminou.
- Todos os dados não globais vão para a pilha, registrando o estado corrente da computação.
- Quando uma ativação anterior prossegue, os dados da pilha são recuperados.
- No caso do caminhamento central:
  - para cada chamada recursiva, o valor de p e o endereço de retorno da chamada recursiva são armazenados na pilha.
  - Quando encontra p$=$null o procedimento retorna para quem chamou utilizando o endereço de retorno que está no topo da pilha.

Problema de Terminação em Procedimentos Recursivos

- Procedimentos recursivos introduzem a possibilidade de iterações que podem não terminar: existe a necessidade de considerar o problema de **terminação**.

- É fundamental que a chamada recursiva a um procedimento P esteja sujeita a uma condição B, a qual se torna não-satisfeita em algum momento da computação.

- Esquema para procedimentos recursivos: composição $\mathcal{C}$ de comandos S_i e P.
  $P \equiv$ **if** B **then** $\mathcal{C}[S_i, P]$

- Para demonstrar que uma repetição termina, define-se uma função $f(x)$, sendo x o conjunto de variáveis do programa, tal que:

  1. $f(x) \leq 0$ implica na condição de terminação;

  2. $f(x)$ é decrementada a cada iteração.

Problema de Terminação em Procedimentos Recursivos

- Uma forma simples de garantir terminação é associar um parâmetro n para P (no caso **por valor**) e chamar P recursivamente com $n - 1$.

- A substituição da condição B por $n > 0$ garante terminação.
  $P \equiv$ **if** $n > 0$ **then** $\mathcal{P}[S_i, P(n-1)]$

- É necessário mostrar que o nível mais profundo de recursão é finito, e também possa ser mantido pequeno, pois cada ativação recursiva usa uma parcela de memória para acomodar as variáveis.

Quando Não Usar Recursividade

- Nem todo problema de natureza recursiva deve ser resolvido com um algoritmo recursivo.
- Estes podem ser caracterizados pelo esquema $P \equiv$ **if** B **then** (S, P)
- Tais programas são facilmente transformáveis em uma versão não recursiva $P \equiv (x := x_0;$ **while** B **do** $S)$

Exemplo de Quando Não Usar Recursividade

- Cálculo dos **números de Fibonacci**
  $f_0 = 0, f_1 = 1,$
  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{para} n \geq 2$
- Solução: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^n - (-\Phi)^{-n}]$, onde $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ é a **razão de ouro**.
- O procedimento recursivo obtido diretamente da equação é o seguinte:

```
package cap2;
public class Fibonacci {
  public static int fibRec (int n) {
    if (n < 2) return n;
    else return (fibRec (n−1) + fibRec (n−2));
  }
}
```

- O programa é extremamente ineficiente porque recalcula o mesmo valor várias vezes.
- Neste caso, a complexidade de espaço para calcular f_n é $O(\Phi^n)$.
- Considerando que a complexidade de tempo $f(n)$ é o número de adições, $f(n) = O(\Phi^n)$.

Versão iterativa do Cálculo de Fibonacci

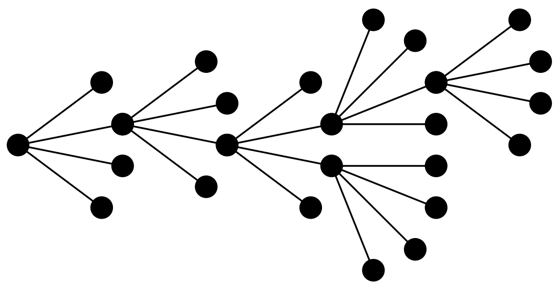
```
package cap2;
public class Fibonacci {
  public static int fibIter (int n) {
    int i = 1, f = 0;
    for (int k = 1; k <= n; k++) {
      f = i + f;
      i = f - i;
    }
    return f;
  }
}
```

- O programa tem complexidade de tempo $O(n)$ e complexidade de espaço $O(1)$.
- Devemos evitar uso de recursividade quando existe uma solução óbvia por iteração.
- Comparação versões recursiva e iterativa:

n	10	20	30	50	100
$fibRec$	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^9 anos
$fibIter$	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

Algoritmos Tentativa e Erro (*Backtracking*)

- **Tentativa e erro**: decompor o processo em um número finito de subtarefas parciais que devem ser exploradas exaustivamente.
- O processo de tentativa gradualmente constrói e percorre uma árvore de subtarefas.



- Algoritmos tentativa e erro não seguem regra fixa de computação:
  - Passos em direção à solução final são tentados e registrados;
  - Caso esses passos tomados não levem à solução final, eles podem ser retirados e apagados do registro.
- Quando a pesquisa na árvore de soluções cresce rapidamente é necessário usar **algoritmos aproximados** ou **heurísticas** que não garantem a solução ótima mas são rápidos.

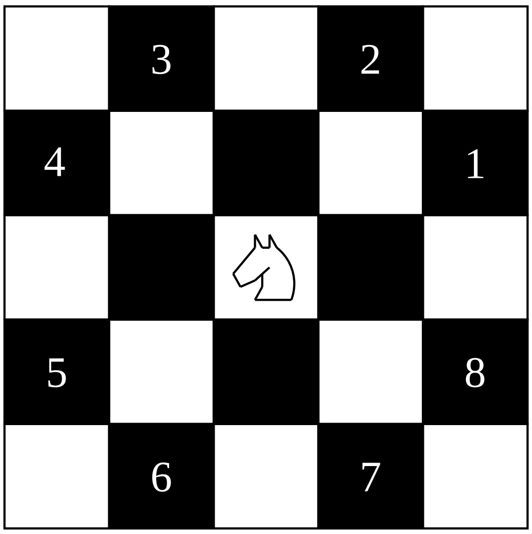
Backtracking: Passeio do Cavalo

- Tabuleiro com $n \times n$ posições: cavalo movimenta-se segundo as regras do xadrez.
- Problema: a partir de $(x_0, \ y_0)$, encontrar, se existir, um passeio do cavalo que visita todos os pontos do tabuleiro uma única vez.
- Tenta um próximo movimento:

```
void tenta () {
  inicializa seleção de movimentos;
  do {
    seleciona próximo candidato ao movimento;
    if (aceitável) {
        registra movimento;
        if (tabuleiro não está cheio) {
            tenta novo movimento; // Chamada recursiva para tenta
            if (não sucedido) apaga registro anterior;
        }
    }
  } while (movimento não sucedido e não acabaram candidatos a movimento);
}
```

Exemplo de Backtracking - Passeio do Cavalo

- O tabuleiro pode ser representado por uma matriz $n \times n$.
- A situação de cada posição pode ser representada por um inteiro para recordar o histórico das ocupações:
  - t[x,y] = 0, campo $< x, y >$ não visitado,
  - t[x,y] = i, campo $< x, y >$ visitado no i-ésimo movimento, $1 \leq i \leq n^2$.
- Regras do xadrez para os movimentos do cavalo:



Implementação do Passeio do Cavalo

```
package cap2;
public class PasseioCavalo {
  private int n; // Tamanho do lado do tabuleiro
  private int a[], b[], t[][];

  public PasseioCavalo (int n) {
    this.n = n;
    this.t = new int[n][n];  this.a = new int[n];
    this.b = new int[n];
    a[0] = 2;  a[1] = 1;  a[2] =–1; a[3] =–2;
    b[0] = 1;  b[1] = 2;  b[2] = 2; b[3] = 1;
    a[4] = –2; a[5] = –1; a[6] = 1; a[7] = 2;
    b[4] = –1; b[5] = –2; b[6] =–2; b[7] = –1;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++) t[i][j] = 0;
    t[0][0] = 1; // escolhemos uma casa do tabuleiro
  }
// {–– Entra aqui os métodos tenta, imprimePasseio e main mostrados a seguir ––}
  }
```

Implementação do Passeio do Cavalo

```
public boolean tenta (int i, int x, int y) {
  int u, v, k; boolean q;
  k = −1;  // inicializa seleção de movimentos
  do {
    k = k + 1; q = false;
    u = x + a[k]; v = y + b[k];
    /* Teste para verificar se os limites do tabuleiro
       serão respeitados. */
    if ((u >= 0) && (u <= 7) && (v >= 0) && (v <= 7))
      if (t[u][v] == 0) {
        t[u][v] = i;
        if (i < n * n) { // tabuleiro não está cheio
          q = tenta (i+1, u, v); // tenta novo movimento
          if (!q) t[u][v] = 0; // não sucedido apaga reg. anterior
        }
        else q = true;
      }
  } while (!q && (k != 7)); // não há casas a visitar a partir de x,y
  return q;
}
```

Implementação do Passeio do Cavalo

```
public void imprimePasseio () {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      for (int j = 0; j < n; j++)
        System.out.print ("\t" +this.t[i][j]);
      System.out.println ();
    }
  }
  public static void main (String[] args) {
    PasseioCavalo passeioCavalo = new PasseioCavalo (8);
    boolean q = passeioCavalo.tenta (2, 0, 0);
    if (q) passeioCavalo.imprimePasseio();
    else System.out.println ("Sem solucao");
  }
```

Divisão e Conquista

- Consiste em dividir o problema em partes menores, encontrar soluções para as partes, e combiná-las em uma solução global.
- Exemplo: encontrar o maior e o menor elemento de um vetor de inteiros, $v[0..n-1]$, $n \geq 1$,. *Algoritmo na próxima página*.
- Cada chamada de $maxMin4$ atribui à $maxMin[0]$ e $maxMin[1]$ o maior e o menor elemento em $v[linf], v[linf+1], \ldots, v[lsup]$, respectivamente.

Divisão e Conquista

```
package cap2;
public class MaxMin4 {
  public static int [] maxMin4(int v[], int linf, int lsup){
    int maxMin[] = new int[2];
    if (lsup – linf <= 1) {
      if (v[linf] < v[lsup]) {
            maxMin[0] = v[lsup]; maxMin[1] = v[linf];
            }
      else {
            maxMin[0] = v[linf]; maxMin[1] = v[lsup];
      }
    }
    else {
      int meio = (linf + lsup)/2;
      maxMin = maxMin4 (v, linf, meio);
      int max1 = maxMin[0], min1 = maxMin[1];
      maxMin = maxMin4 (v, meio + 1, lsup);
      int max2 = maxMin[0], min2 = maxMin[1];
      if (max1 > max2) maxMin[0] = max1;
      else maxMin[0] = max2;
      if (min1 < min2) maxMin[1] = min1;
      else maxMin[1] = min2;
    }
    return maxMin;
  }
}
```

Divisão e Conquista - Análise do Exemplo

- Seja $T(n)$ uma função de complexidade tal que $T(n)$ é o número de comparações entre os elementos de v, se v contiver n elementos.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 1, && \text{para } n \leq 2,\\
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 2, && \text{para } n > 2.
\end{aligned}
$$

- Quando $n = 2^i$ para algum inteiro positivo i:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + 2\\
2T(n/2) &= 4T(n/4) + 2 \times 2\\
4T(n/4) &= 8T(n/8) + 2 \times 2 \times 2\\
&\vdots\\
2^{i-2}T(n/2^{i-2}) &= 2^{i-1}T(n/2^{i-1}) + 2^{i-1}
\end{aligned}
$$

- Adicionando lado a lado, obtemos:

$$
T(n) = 2^{i-1}T(n/2^{i-1}) + \sum_{k=1}^{i-1} 2^k =
$$

$$
= 2^{i-1}T(2) + 2^i - 2 = 2^{i-1} + 2^i - 2 = \frac{3n}{2} - 2.
$$

- Logo, $T(n) = 3n/2 - 2$ para o melhor caso, o pior caso e o caso médio.

Divisão e Conquista - Análise do Exemplo

- Conforme o Teorema da página 10 do livro, o algoritmo anterior é **ótimo**.
- Entretanto, ele pode ser pior do que os apresentados no Capítulo 1, pois, a cada chamada do método salva os valores de $linf$, $lsup$, $maxMin[0]$ e $maxMin[1]$, além do endereço de retorno dessa chamada.
- Além disso, uma comparação adicional é necessária a cada chamada recursiva para verificar se $lsup - linf \leq 1$.
- n deve ser menor do que a metade do maior inteiro que pode ser representado pelo compilador, para não provocar *overflow* na operação $linf + lsup$.

Divisão e Conquista - Teorema Mestre

- Teorema Mestre: Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ uma medida de complexidade definida sobre os inteiros. A solução da equação de recorrência:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

  para b uma potência de n é:

  1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$,
  2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$, se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,
  3. $T(n) = \Theta(f(n))$, se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n a partir de um valor suficientemente grande.

- O problema é dividido em a subproblemas de tamanho n/b cada um sendo resolvidos recursivamente em tempo $T(n/b)$ cada.

- A função $f(n)$ descreve o custo de dividir o problema em subproblemas e de combinar os resultados de cada subproblema.

Divisão e Conquista - Teorema Mestre

- A prova desse teorema não precisa ser entendida para ele ser aplicado.
- Em cada um dos três casos a função $f(n)$ é comparada com a função $n^{\log_b a}$ e a solução de $T(n)$ é determinada pela maior dessas duas funções.
  - No caso 1, $f(n)$ tem de ser polinomialmente menor do que $n^{\log_b a}$.
  - No caso 2, se as duas funções são iguais, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$.
  - No caso 3, $f(n)$ tem de ser polinomialmente maior do que $n^{\log_b a}$ e, além disso, satisfazer a condição de que $af(n/b) \leq cf(n)$.
- Ele não pode ser aplicado nas aplicações que ficam entre os casos 1 e 2 (quando $f(n)$ é menor do que $n^{\log_b a}$, mas não polinomialmente menor), entre os casos 2 e 3 (quando $f(n)$ é maior do que $n^{\log_b a}$, mas não polinomialmente maior) ou quando a condição $af(n/b) \leq cf(n)$ não é satisfeita.

Divisão e Conquista - Exemplo do Uso do Teorema Mestre

- Considere a equação de recorrência:

  $$T(n) = 4T(n/2) + n,$$

  onde $a = 4$, $b = 2$, $f(n) = n$ e $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = \Theta(n^2)$.

- O caso 1 se aplica porque $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n)$, onde $\epsilon = 1$, e a solução é $T(n) = \Theta(n^2)$.

Balanceamento

- No projeto de algoritmos, é importante procurar sempre manter o **balanceamento** na subdivisão de um problema em partes menores.
- Divisão e conquista não é a única técnica em que balanceamento é útil.

Vamos considerar um exemplo de ordenação

- Seleciona o menor elemento do conjunto $v[0..n-1]$ e então troca este elemento com o primeiro elemento $v[0]$.
- Repete o processo com os $n-1$ elementos, resultando no segundo maior elemento, o qual é trocado com o segundo elemento $v[1]$.
- Repetindo para $n-2$, $n-3$, $\ldots$, 2 ordena a seqüência.

Balanceamento - Análise do Exemplo

- O algoritmo leva à equação de recorrência: $T(n) = T(n-1) + n - 1, \quad T(1) = 0$, para o número de comparações entre elementos.

- Substituindo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n - 1 \\ T(n-1) &= T(n-2) + n - 2 \\ &\vdots \\ T(2) &= T(1) + 1 \end{aligned}$$

- Adicionando lado a lado, obtemos: $T(n) = T(1) + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

- Logo, o algorimo é $O(n^2)$.

- Embora o algoritmo possa ser visto como uma aplicação recursiva de divisão e conquista, ele não é eficiente para valores grandes de n.

- Para obter eficiência assintótica é necessário **balanceamento**: dividir em dois subproblemas de tamanhos aproximadamente iguais, ao invés de um de tamanho 1 e o outro de tamanho $n-1$.

Exemplo de Balanceamento - Mergesort

- **Intercalação**: unir dois arquivos ordenados gerando um terceiro ordenado (*merge*).
- Colocar no terceiro arquivo o menor elemento entre os menores dos dois arquivos iniciais, desconsiderando este mesmo elemento nos passos posteriores.
- Este processo deve ser repetido até que todos os elementos dos arquivos de entrada sejam escolhidos.
- Algoritmo de ordenação (**Mergesort**):
  - dividir recursivamente o vetor a ser ordenado em dois, até obter n vetores de 1 único elemento.
  - Aplicar a intercalação tendo como entrada 2 vetores de um elemento, formando um vetor ordenado de dois elementos.
  - Repetir este processo formando vetores ordenados cada vez maiores até que todo o vetor esteja ordenado.

Exemplo de Balanceamento - Implementação do Mergesort

```
package cap2;
public class Ordenacao {
  public static void mergeSort (int v[], int i, int j) {
    if (i < j) {
      int m = (i + j)/2;
      mergeSort (v, i, m); mergeSort (v, m + 1, j);
      merge (v, i, m, j); // Intercala v[i..m] e v[m+1..j] em
v[i..j]
    }
  }
}
```

- Considere n como sendo uma potência de 2.
- $merge(v, i, m, j)$, recebe duas seqüências ordenadas $v[i..m]$ e $v[m + 1..j]$ e produz uma outra seqüência ordenada dos elementos de $v[i..m]$ e $v[m + 1..j]$.
- Como $v[i..m]$ e $v[m + 1..j]$ estão ordenados, $merge$ requer no máximo $n - 1$ comparações.
- $merge$ seleciona repetidamente o menor dentre os menores elementos restantes em $v[i..m]$ e $v[m + 1..j]$. Caso empate, retira de qualquer uma delas.

Análise do Mergesort

- Na contagem de comparações, o comportamento do Mergesort pode ser representado por:
  $T(n) = 2T(n/2) + n - 1, \quad T(1) = 0$
- No caso da equação acima temos:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2T(n/2) + n - 1 \\ 2T(n/2) & = & 2^2T(n/2^2) + 2\dfrac{n}{2} - 2 \times 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 2^{i-1}T(n/2^{i-1}) & = & 2^iT(n/2^i) + 2^{i-1}\dfrac{n}{2^{i-1}} - 2^{i-1} \end{array}$$

- Adicionando lado a lado:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2^iT(n/2^i) + \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} n - \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \\ & = & in - \dfrac{2^{i-1+1} - 1}{2 - 1} \\ & = & n \log n - n + 1. \end{array}$$

- Logo, o algoritmo é $O(n \log n)$.
- Para valores grandes de n, o balanceamento levou a um resultado muito superior, saímos de $O(n^2)$ para $O(n \log n)$.

Programação Dinâmica

- Quando a soma dos tamanhos dos subproblemas é $O(n)$ então é provável que o algoritmo recursivo tenha **complexidade polinomial**.
- Quando a divisão de um problema de tamanho n resulta em n subproblemas de tamanho $n - 1$ então é provável que o algoritmo recursivo tenha **complexidade exponencial**.
- Nesse caso, a técnica de programação dinâmica pode levar a um algoritmo mais eficiente.
- A programação dinâmica calcula a solução para todos os subproblemas, partindo dos subproblemas menores para os maiores, armazenando os resultados em uma tabela.
- A vantagem é que uma vez que um subproblema é resolvido, a resposta é armazenada em uma tabela e nunca mais é recalculado.

Programação Dinâmica - Exemplo

Produto de n matrizes

- $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, onde cada M_i é uma matriz com d_{i-1} linhas e d_i colunas.
- A ordem da multiplicação pode ter um efeito enorme no número total de operações de adição e multiplicação necessárias para obter M.
- Considere o produto de uma matriz $p \times q$ por outra matriz $q \times r$ cujo algoritmo requer $O(pqr)$ operações.
- Considere o produto $M = M_1[10, 20] \times M_2[20, 50] \times M_3[50, 1] \times M_4[1, 100]$, onde as dimensões de cada matriz está mostrada entre colchetes.
- A avaliação de M na ordem $M = M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))$ requer 125.000 operações, enquanto na ordem $M = (M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$ requer apenas 2.200.

Programação Dinâmica - Exemplo

- Tentar todas as ordens possíveis para minimizar o número de operações $f(n)$ é exponencial em n, onde $f(n) \geq 2^{n-2}$.
- Usando programação dinâmica é possível obter um algoritmo $O(n^3)$.
- Seja m_{ij} menor custo para computar $M_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_j$, para $1 \leq i \leq j \leq n$.
- Neste caso,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j, \\ \text{Min}_{i \leq k < j} \left(m_{ik} + m_{k+1,j} + d_{i-1} d_k d_j \right), & \text{se } j > i. \end{cases}$$

- m_{ik} representa o custo mínimo para calcular $M' = M_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_k$
- $m_{k+1,j}$ representa o custo mínimo para calcular $M'' = M_{k+1} \times M_{k+2} \times \cdots \times M_j$.
- $d_{i-1} d_k d_j$ representa o custo de multiplicar $M'[d_{i-1}, d_k]$ por $M''[d_k, d_j]$.
- $m_{ij},\ j > i$ representa o custo mínimo de todos os valores possíveis de k entre i e $j - 1$, da soma dos três termos.

Programação Dinâmica - Exemplo

- O enfoque programação dinâmica calcula os valores de m_{ij} na ordem crescente das diferenças nos subscritos.
- O calculo inicia com m_{ii} para todo i, depois $m_{i,i+1}$ para todo i, depois $m_{i,i+2}$, e assim sucessivamente.
- Desta forma, os valores m_{ik} e $m_{k+1,j}$ estarão disponíveis no momento de calcular m_{ij}.
- Isto acontece porque $j - i$ tem que ser estritamente maior do que ambos os valores de $k - i$ e $j - (k + 1)$ se k estiver no intervalo $i \leq k < j$.
- Programa para computar a ordem de multiplicação de n matrizes, $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, de forma a obter o menor número possível de operações.

Programação Dinâmica - Implementação

```
package cap2;
import java.io.*;
public class AvaliaMultMatrizes {
  public static void main(String[] args)throws IOException {
    int n, maxn = Integer.parseInt (args[0]);
    int d[] = new int[maxn + 1];
    int m[][] = new int[maxn][maxn];
    BufferedReader in = new BufferedReader (
                          new InputStreamReader (System.in));
    System.out.print ("Numero de matrizes n:");
    n = Integer.parseInt (in.readLine());
    System.out.println ("Dimensoes das matrizes:");
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
      System.out.print (" d["+i+"] = ");
      d[i] = Integer.parseInt (in.readLine());
    }
    // Continua na próxima transparência...
```

Programação Dinâmica - Continuação da Implementação

```
    for (int i = 0; i < n; i++) m[i][i] = 0;
    for (int h = 1; h < n; h++) {
      for (int i = 1; i <= n - h; i++) {
        int j = i + h;
        m[i-1][j-1] = Integer.MAX_VALUE;
        for (int k = i; k < j; k++) {
          int temp = m[i-1][k-1] + m[k][j-1] +
          + d[i-1] * d[k] * d[j];
          if (temp < m[i-1][j-1]) m[i-1][j-1] = temp;
        }
        System.out.print(" m[" + i+"]["+j+"]= "+ m[i-1][j-1]);
      }
      System.out.println();
    }
  }
}
```

Programação Dinâmica - Implementação

- A execução do programa obtém o custo mínimo para multiplicar as n matrizes, assumindo que são necessárias pqr operações para multiplicar uma matriz $p \times q$ por outra matriz $q \times r$.

- A execução do programa para as quatro matrizes onde d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 são 10, 20, 50, 1, 100, resulta:

$m_{11} = 0$	$m_{22} = 0$	$m_{33} = 0$	$m_{44} = 0$
$m_{12} = 10.000$	$m_{23} = 1.000$	$m_{34} = 5.000$	
$m_{13} = 1.200$	$m_{24} = 3.000$		
$m_{14} = 2.200$			

Programação Dinâmica - Princípio da Otimalidade

- A ordem de multiplicação pode ser obtida registrando o valor de k para cada entrada da tabela que resultou no mínimo.
- Essa solução eficiente está baseada no **princípio da otimalidade**:
  - em uma seqüência ótima de escolhas ou de decisões cada subseqüência deve também ser ótima.
- Cada subseqüência representa o custo mínimo, assim como m_{ij}, $j > i$.
- Assim, todos os valores da tabela representam escolhas ótimas.
- O princípio da otimalidade não pode ser aplicado indiscriminadamente.
- Quando o princípio não se aplica é provável que não se possa resolver o problema com sucesso por meio de programação dinâmica.

Aplicação do Princípio da Otimalidade

- Por exemplo, quando o problema utiliza recursos limitados, quando o total de recursos usados nas subinstâncias é maior do que os recursos disponíveis.
- Se o caminho mais curto entre Belo Horizonte e Curitiba passa por Campinas:
  - o caminho entre Belo Horizonte e Campinas também é o mais curto possível
  - assim como o caminho entre Campinas e Curitiba.
  - Logo, o princípio da otimalidade se aplica.

Não Aplicação do Princípio da Otimalidade

- No problema de encontrar o caminho mais longo entre duas cidades:
  - Um caminho simples nunca visita uma mesma cidade duas vezes.
  - Se o caminho mais longo entre Belo Horizonte e Curitiba passa por Campinas, isso não significa que o caminho possa ser obtido tomando o caminho simples mais longo entre Belo Horizonte e Campinas e depois o caminho simples mais longo entre Campinas e Curitiba.
  - Quando os dois caminhos simples são ajuntados é pouco provável que o caminho resultante também seja simples.
  - Logo, o princípio da otimalidade não se aplica.

Algoritmos Gulosos

- Resolve problemas de otimização.
- Exemplo: algoritmo para encontrar o caminho mais curto entre dois vértices de um grafo.
  - Escolhe a aresta que parece mais promissora em qualquer instante;
  - Independente do que possa acontecer mais tarde, nunca reconsidera a decisão.
- Não necessita avaliar alternativas, ou usar procedimentos sofisticados para desfazer decisões tomadas previamente.
- Problema geral: dado um conjunto C, determine um subconjunto $S \subseteq C$ tal que:
  - S satisfaz uma dada propriedade P, e
  - S é mínimo (ou máximo) em relação a algum critério α.
- O **algoritmo guloso** para resolver o problema geral consiste em um processo iterativo em que S é construído adicionando-se ao mesmo elementos de C um a um.

Características dos Algoritmos Gulosos

- Para construir a solução ótima existe um conjunto ou lista de candidatos.
- São acumulados um conjunto de candidatos considerados e escolhidos, e o outro de candidatos considerados e rejeitados.
- Existe função que verifica se um conjunto particular de candidatos produz uma *solução* (sem considerar otimalidade no momento).
- Outra função verifica se um conjunto de candidatos é *viável* (também sem preocupar com a otimalidade).
- Uma *função de seleção* indica a qualquer momento quais dos candidatos restantes é o mais promissor.
- Uma *função objetivo* fornece o valor da solução encontrada, como o comprimento do caminho construído (não aparece de forma explicita no algoritmo guloso).

Pseudo Código de Algoritmo Guloso

```
Conjunto guloso (Conjunto C) { /* C: conjunto de candidatos */
  S = ∅; /* S contém conjunto solução */
  while ((C ≠ ∅) && not solução(S)) {
    x = seleciona (C);
    C = C − x;
    if (viável (S + x)) S = S + x;
  }
  if (solução (S))
       return S else return ("Não existe solução");
}
```

- Inicialmente, o conjunto S de candidatos escolhidos está vazio.
- A cada passo, o melhor candidato restante ainda não tentado é considerado. O critério de escolha é ditado pela função de seleção.
- Se o conjunto aumentado de candidatos se torna inviável, o candidato é rejeitado. Senão, o candidato é adicionado ao conjunto S de candidatos escolhidos.
- A cada aumento de S verificamos se S constitui uma solução ótima.

Características da Implementação de Algoritmos Gulosos

- Quando funciona corretamente, a primeira solução encontrada é sempre ótima.
- A função de seleção é geralmente relacionada com a função objetivo.
- Se o objetivo é:
  - maximizar $\Rightarrow$ provavelmente escolherá o candidato restante que proporcione o maior ganho individual.
  - minimizar $\Rightarrow$ então será escolhido o candidato restante de menor custo.
- O algoritmo nunca muda de idéia:
  - Uma vez que um candidato é escolhido e adicionado à solução ele lá permanece para sempre.
  - Uma vez que um candidato é excluído do conjunto solução, ele nunca mais é reconsiderado.

Algoritmos Aproximados

- Problemas que somente possuem algoritmos exponenciais para resolvê-los são considerados “difíceis”.
- Problemas considerados intratáveis ou difíceis são muito comuns.
- Exemplo: **problema do caixeiro viajante** cuja complexidade de tempo é $O(n!)$.
- Diante de um problema difícil é comum remover a exigência de que o algoritmo tenha sempre que obter a solução ótima.
- Neste caso procuramos por algoritmos eficientes que não garantem obter a solução ótima, mas uma que seja a mais próxima possível da solução ótima.

Tipos de Algoritmos Aproximados

- **Heurística**: é um algoritmo que pode produzir um bom resultado, ou até mesmo obter a solução ótima, mas pode também não produzir solução alguma ou uma solução que está distante da solução ótima.

- **Algoritmo aproximado**: é um algoritmo que gera **soluções aproximadas** dentro de um limite para a razão entre a solução ótima e a produzida pelo algoritmo aproximado (comportamento monitorado sob o ponto de vista da qualidade dos resultados).