# Introdução*

Última alteração: 1 de Abril de 2004

*Transparências elaboradas por Charles Ornelas Almeida e Nivio Ziviani



## Algoritmos, Estruturas de Dados e Programas

- Os algoritmos fazem parte do dia-a-dia das pessoas. Exemplos de algoritmos:
  - instruções para o uso de medicamentos,
  - indicações de como montar um aparelho,
  - uma receita de culinária.
- Seqüência de ações executáveis para a obtenção de uma solução para um determinado tipo de problema.
- Segundo Dijkstra, um algoritmo corresponde a uma descrição de um padrão de comportamento, expresso em termos de um conjunto finito de ações.
  - Executando a operação $a + b$ percebemos um padrão de comportamento, mesmo que a operação seja realizada para valores diferentes de $a$ e $b$.



## Estruturas de dados

- Estruturas de dados e algoritmos estão intimamente ligados:
  - não se pode estudar estruturas de dados sem considerar os algoritmos associados a elas,
  - assim como a escolha dos algoritmos em geral depende da representação e da estrutura dos dados.
- Para resolver um problema é necessário escolher uma abstração da realidade, em geral mediante a definição de um conjunto de dados que representa a situação real.
- A seguir, deve ser escolhida a forma de representar esses dados.



## Escolha da Representação dos Dados

- A escolha da representação dos dados é determinada, entre outras, pelas operações a serem realizadas sobre os dados.
- Considere a operação de adição:
  - Para pequenos números, uma boa representação é por meio de barras verticais (caso em que a operação de adição é bastante simples).
  - Já a representação por dígitos decimais requer regras relativamente complicadas, as quais devem ser memorizadas.
  - Entretanto, quando consideramos a adição de grandes números é mais fácil a representação por dígitos decimais (devido ao princípio baseado no peso relativo da posição de cada dígito).

## Programas

- Programar é basicamente estruturar dados e construir algoritmos.
- Programas são formulações concretas de algoritmos abstratos, baseados em representações e estruturas específicas de dados.
- Programas representam uma classe especial de algoritmos capazes de serem seguidos por computadores.
- Um computador só é capaz de seguir programas em linguagem de máquina (seqüência de instruções obscuras e desconfortáveis).
- É necessário construir linguagens mais adequadas, que facilitem a tarefa de programar um computador.
- Uma linguagem de programação é uma técnica de notação para programar, com a intenção de servir de veículo tanto para a expressão do raciocínio algorítmico quanto para a execução automática de um algoritmo por um computador.



## Tipos de Dados

- Caracteriza o conjunto de valores a que uma constante pertence, ou que podem ser assumidos por uma variável ou expressão, ou que podem ser gerados por uma função.
- Tipos simples de dados são grupos de valores indivisíveis (como os tipos básicos *integer, boolean, char* e *real* do Pascal).
  - Exemplo: uma variável do tipo *boolean* pode assumir o valor verdadeiro ou o valor falso, e nenhum outro valor.
- Os tipos estruturados em geral definem uma coleção de valores simples, ou um agregado de valores de tipos diferentes.



## Tipos Abstratos de Dados (TAD’s)

- Modelo matemático, acompanhado das operações definidas sobre o modelo.
  - Exemplo: o conjunto dos inteiros acompanhado das operações de adição, subtração e multiplicação.
- TAD’s sČo utilizados extensivamente como base para o projeto de algoritmos.
- A implementação do algoritmo em uma linguagem de programação específica exige a representaĞČo do TAD em termos dos tipos de dados e dos operadores suportados.
- A representação do modelo matemático por trás do tipo abstrato de dados é realizada mediante uma estrutura de dados.
- Podemos considerar TAD’s como generalizações de tipos primitivos e procedimentos como generalizações de operações primitivas.
- O TAD encapsula tipos de dados. A definição do tipo e todas as operações ficam localizadas numa seção do programa.



## Implementação de TAD’s

- Considere uma aplicação que utilize uma lista de inteiros. Poderíamos definir TAD Lista, com as seguintes operações:
  1. faça a lista vazia;
  2. obtenha o primeiro elemento da lista; se a lista estiver vazia, então retorne nulo;
  3. insira um elemento na lista.
- Há várias opções de estruturas de dados que permitem uma implementação eficiente para listas (por ex., o tipo estruturado arranjo).
- Cada operação do tipo abstrato de dados é implementada como um procedimento na linguagem de programação escolhida.
- Qualquer alteração na implementação do TAD fica restrita à parte encapsulada, sem causar impactos em outras partes do código.
- Cada conjunto diferente de operações define um TAD diferente, mesmo atuem sob um mesmo modelo matemático.
- A escolha adequada de uma implementação depende fortemente das operações a serem realizadas sobre o modelo.

## Medida do Tempo de Execução de um Programa

- O projeto de algoritmos é fortemente influenciado pelo estudo de seus comportamentos.
- Depois que um problema é analisado e decisões de projeto são finalizadas, é necessário estudar as várias opções de algoritmos a serem utilizados, considerando os aspectos de tempo de execução e espaço ocupado.
- Muitos desses algoritmos são encontrados em áreas como pesquisa operacional, otimização, teoria dos grafos, estatística, probabilidades, entre outras.



## Tipos de Problemas na Análise de Algoritmos

- **Análise de um algoritmo particular**.
  - Qual é o custo de usar um dado algoritmo para resolver um problema específico?
  - Características que devem ser investigadas:
    - ∗ análise do número de vezes que cada parte do algoritmo deve ser executada,
    - ∗ estudo da quantidade de memória necessária.
- **Análise de uma classe de algoritmos**.
  - Qual é o algoritmo de menor custo possível para resolver um problema particular?
  - Toda uma família de algoritmos é investigada.
  - Procura-se identificar um que seja o melhor possível.
  - Coloca-se **limites** para a complexidade computacional dos algoritmos pertencentes à classe.



## Custo de um Algoritmo

- Determinando o menor custo possível para resolver problemas de uma dada classe, temos a medida da dificuldade inerente para resolver o problema.
- Quando o custo de um algoritmo é igual ao menor custo possível, o algoritmo é **ótimo** para a medida de custo considerada.
- Podem existir vários algoritmos para resolver o mesmo problema.
- Se a mesma medida de custo é aplicada a diferentes algoritmos, então é possível compará-los e escolher o mais adequado.



## Medida do Custo pela Execução do Programa

- Tais medidas são bastante inadequadas e os resultados jamais devem ser generalizados:
  - os resultados são dependentes do compilador que pode favorecer algumas construções em detrimento de outras;
  - os resultados dependem do *hardware*;
  - quando grandes quantidades de memória são utilizadas, as medidas de tempo podem depender deste aspecto.
- Apesar disso, há argumentos a favor de se obterem medidas reais de tempo.
  - Ex.: quando há vários algoritmos distintos para resolver um mesmo tipo de problema, todos com um custo de execução dentro de uma mesma ordem de grandeza.
  - Assim, são considerados tanto os custos reais das operações como os custos não aparentes, tais como alocação de memória, indexação, carga, dentre outros.

## Medida do Custo por meio de um Modelo Matemático

- Usa um modelo matemático baseado em um computador idealizado.
- Deve ser especificado o conjunto de operações e seus custos de execuções.
- É mais usual ignorar o custo de algumas das operações e considerar apenas as operações mais significativas.
- Ex.: algoritmos de ordenação. Consideramos o número de comparações entre os elementos do conjunto a ser ordenado e ignoramos as operações aritméticas, de atribuição e manipulações de índices, caso existam.



## Função de Complexidade

- Para medir o custo de execução de um algoritmo é comum definir uma função de custo ou **função de complexidade** $f$.
- $f(n)$ é a medida do tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho $n$.
- Função de **complexidade de tempo**: $f(n)$ mede o tempo necessário para executar um algoritmo em um problema de tamanho $n$.
- Função de **complexidade de espaço**: $f(n)$ mede a memória necessária para executar um algoritmo em um problema de tamanho $n$.
- Utilizaremos $f$ para denotar uma função de complexidade de tempo daqui para a frente.
- A complexidade de tempo na realidade não representa tempo diretamente, mas o número de vezes que determinada operação considerada relevante é executada.



## Exemplo - Maior Elemento

- Considere o algoritmo para encontrar o maior elemento de um vetor de inteiros $A[1..n], n \geq 1$.

```
function Max (var A: Vetor): integer;
var i, Temp: integer;
begin
  Temp := A[1];
  for i := 2 to n do if Temp < A[i] then Temp := A[i];
  Max := Temp;
end;
```

- Seja $f$ uma função de complexidade tal que $f(n)$ é o número de comparações entre os elementos de $A$, se $A$ contiver $n$ elementos.
- Logo $f(n) = n - 1, \text{ para } n > 0$.
- Vamos provar que o algoritmo apresentado no programa acima é **ótimo**.



## Exemplo - Maior Elemento

- **Teorema**: Qualquer algoritmo para encontrar o maior elemento de um conjunto com $n$ elementos, $n \geq 1$, faz pelo menos $n - 1$ comparações.
- **Prova**: Cada um dos $n - 1$ elementos tem de ser mostrado, por meio de comparações, que é menor do que algum outro elemento.
- Logo $n - 1$ comparações são necessárias. $\square$
- O teorema acima nos diz que, se o número de comparações for utilizado como medida de custo, então a função Max do programa anterior é ótima.

## Tamanho da Entrada de Dados

- A medida do custo de execução de um algoritmo depende principalmente do tamanho da entrada dos dados.
- É comum considerar o tempo de execução de um programa como uma função do tamanho da entrada.
- Para alguns algoritmos, o custo de execução é uma função da entrada particular dos dados, não apenas do tamanho da entrada.
- No caso da função Max do programa do exemplo, o custo é uniforme sobre todos os problemas de tamanho $n$.
- Já para um algoritmo de ordenação isso não ocorre: se os dados de entrada já estiverem quase ordenados, então o algoritmo pode ter que trabalhar menos.



## Melhor Caso, Pior Caso e Caso Médio

- **Melhor caso**: menor tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho $n$.
- **Pior caso**: maior tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho $n$.
- Se $f$ é uma função de complexidade baseada na análise de pior caso, o custo de aplicar o algoritmo nunca é maior do que $f(n)$.
- **Caso médio** (ou caso esperado): média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho $n$.
- Na análise do caso esperado, supõe-se uma **distribuição de probabilidades** sobre o conjunto de entradas de tamanho $n$ e o custo médio é obtido com base nessa distribuição.
- A análise do caso médio é geralmente muito mais difícil de obter do que as análises do melhor e do pior caso.
- É comum supor uma distribuição de probabilidades em que todas as entradas possíveis são igualmente prováveis.
- Na prática isso nem sempre é verdade.



## Exemplo - Registros de um Arquivo

- Considere o problema de acessar os **registros** de um arquivo.
- Cada registro contém uma **chave** única que é utilizada para recuperar registros do arquivo.
- O problema: dada uma chave qualquer, localize o registro que contenha esta chave.
- O algoritmo de pesquisa mais simples é o que faz a **pesquisa seqüencial**.
- Seja $f$ uma função de complexidade tal que $f(n)$ é o número de registros consultados no arquivo (número de vezes que a chave de consulta é comparada com a chave de cada registro).
  - melhor caso: $f(n) = 1$ (registro procurado é o primeiro consultado);
  - pior caso: $f(n) = n$ (registro procurado é o último consultado ou não está presente no arquivo);
  - caso médio: $f(n) = (n + 1)/2$.



## Exemplo - Registros de um Arquivo

- No estudo do caso médio, vamos considerar que toda pesquisa recupera um registro.
- Se $p_i$ for a probabilidade de que o $i$-ésimo registro seja procurado, e considerando que para recuperar o $i$-ésimo registro são necessárias $i$ comparações, então $f(n) = 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + \cdots + n \times p_n$.
- Para calcular $f(n)$ basta conhecer a distribuição de probabilidades $p_i$.
- Se cada registro tiver a mesma probabilidade de ser acessado que todos os outros, então $p_i = 1/n, 1 \leq i \leq n$.
- Neste caso $f(n) = \frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$.
- A análise do caso esperado revela que uma pesquisa com sucesso examina aproximadamente metade dos registros.

## Exemplo - Maior e Menor Elemento (1)

- Considere o problema de encontrar o maior e o menor elemento de um vetor de inteiros $A[1..n], n \geq 1$.
- Um algoritmo simples pode ser derivado do algoritmo apresentado no programa para achar o maior elemento.

```
procedure MaxMin1 (var A: Vetor; var Max, Min: integer);
var i: integer;
begin
  Max := A[1]; Min := A[1];
  for i := 2 to n do
    begin
    if A[i] > Max then Max := A[i];
    if A[i] < Min then Min := A[i];
    end;
end;
```

- Seja $f(n)$ o número de comparações entre os elementos de $A$, se $A$ contiver $n$ elementos.
- Logo $f(n) = 2(n-1), \text{ para } n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio.



## Exemplo - Maior e Menor Elemento (2)

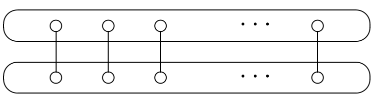
```
procedure MaxMin2 (var A: Vetor; var Max, Min: integer);
var i: integer;
begin
  Max := A[1]; Min := A[1];
  for i := 2 to n do
    if A[i] > Max
    then Max := A[i]
    else if A[i] < Min then Min := A[i];
end;
```

- MaxMin1 pode ser facilmente melhorado: a comparação $A[i] <$ Min só é necessária quando a comparação $A[i] >$ Max dá falso.
- Para a nova implementação temos:
  - melhor caso: $f(n) = n - 1$ (quando os elementos estão em ordem crescente);
  - pior caso: $f(n) = 2(n-1)$ (quando os elementos estão em ordem decrescente);
  - caso médio: $f(n) = 3n/2 - 3/2$.
- No caso médio, $A[i]$ é maior do que Max a metade das vezes.
- Logo $f(n) = n - 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$, para $n > 0$.



## Exemplo - Maior e Menor Elemento (3)

- Considerando o número de comparações realizadas, existe a possibilidade de obter um algoritmo mais eficiente:
  1. Compare os elementos de $A$ aos pares, separando-os em dois subconjuntos (maiores em um e menores em outro), a um custo de $\lceil n/2 \rceil$ comparações.
  2) O máximo é obtido do subconjunto que contém os maiores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil - 1$ comparações.
  3) O mínimo é obtido do subconjunto que contém os menores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil - 1$ comparações.



← Contém o máximo

← Contém o mínimo



## Exemplo - Maior e Menor Elemento (3)

```
procedure MaxMin3 (var A: Vetor; var Max, Min: integer);
var i, FimDoAnel: integer;
begin
  if (n mod 2) > 0
  then begin A[n+1] := A[n]; FimDoAnel := n; end
  else FimDoAnel := n-1;
  if A[1] > A[2]
  then begin Max := A[1]; Min := A[2]; end
  else begin Max := A[2]; Min := A[1]; end;
  i := 3;
  while i <= FimDoAnel do
    begin
    if A[i] > A[i+1]
    then begin
         if A[i] > Max then Max := A[i];
         if A[i+1] < Min then Min := A[i+1];
         end
    else begin
         if A[i] < Min then Min := A[i];
         if A[i+1] > Max then Max := A[i+1];
         end;
    i := i + 2;
    end;
end;
```

## Exemplo - Maior e Menor Elemento (3)

- Os elementos de $A$ são comparados dois a dois e os elementos maiores são comparados com *Max* e os elementos menores são comparados com *Min*.
- Quando $n$ é ímpar, o elemento que está na posição $A[n]$ é duplicado na posição $A[n+1]$ para evitar um tratamento de exceção.
- Para esta implementação, $f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{3n}{2} - 2$, para $n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio.



## Comparação entre os Algoritmos MaxMin1, MaxMin2 e MaxMin3

- A tabela apresenta uma comparação entre os algoritmos dos programas MaxMin1, MaxMin2 e MaxMin3, considerando o número de comparações como medida de complexidade.
- Os algoritmos MaxMin2 e MaxMin3 são superiores ao algoritmo MaxMin1 de forma geral.
- O algoritmo MaxMin3 é superior ao algoritmo MaxMin2 com relação ao pior caso e bastante próximo quanto ao caso médio.

| Os três | $f(n)$ | | |
|---|---|---|---|
| algoritmos | Melhor caso | Pior caso | Caso médio |
| MaxMin1 | $2(n-1)$ | $2(n-1)$ | $2(n-1)$ |
| MaxMin2 | $n-1$ | $2(n-1)$ | $3n/2 - 3/2$ |
| MaxMin3 | $3n/2 - 2$ | $3n/2 - 2$ | $3n/2 - 2$ |



## Limite Inferior - Uso de um Oráculo

- Existe possibilidade de obter um algoritmo MaxMin mais eficiente?
- Para responder temos de conhecer o **limite inferior** para essa classe de algoritmos.
- Técnica muito utilizada: uso de um oráculo.
- Dado um modelo de computação que expresse o comportamento do algoritmo, o oráculo informa o resultado de cada passo possível (no caso, o resultado de cada comparação).
- Para derivar o limite inferior, o oráculo procura sempre fazer com que o algoritmo trabalhe o máximo, escolhendo como resultado da próxima comparação aquele que cause o maior trabalho possível necessário para determinar a resposta final.



## Exemplo de Uso de um Oráculo

- **Teorema**: Qualquer algoritmo para encontrar o maior e o menor elemento de um conjunto com $n$ elementos não ordenados, $n \geq 1$, faz pelo menos $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparações.
- **Prova**: A técnica utilizada define um oráculo que descreve o comportamento do algoritmo por meio de um conjunto de $n$–tuplas, mais um conjunto de regras associadas que mostram as tuplas possíveis (estados) que um algoritmo pode assumir a partir de uma dada tupla e uma única comparação.
- Uma $4$–tupla, representada por $(a, b, c, d)$, onde os elementos de:
  - $a \rightarrow$ nunca foram comparados;
  - $b \rightarrow$ foram vencedores e nunca perderam em comparações realizadas;
  - $c \rightarrow$ foram perdedores e nunca venceram em comparações realizadas;
  - $d \rightarrow$ foram vencedores e perdedores em comparações realizadas.

## Exemplo de Uso de um Oráculo

- O algoritmo inicia no estado $(n, 0, 0, 0)$ e termina com $(0, 1, 1, n-2)$.
- Após cada comparação a tupla $(a, b, c, d)$ consegue progredir apenas se ela assume um dentre os seis estados possíveis abaixo:
  – $(a-2, b+1, c+1, d)$ se $a \geq 2$ (dois elementos de $a$ são comparados)
  – $(a-1, b+1, c, d)$ ou $(a-1, b, c+1, d)$ ou $(a-1, b, c, d+1)$ se $a \geq 1$ (um elemento de $a$ comparado com um de $b$ ou um de $c$)
  – $(a, b-1, c, d+1)$ se $b \geq 2$ (dois elementos de $b$ são comparados)
  – $(a, b, c-1, d+1)$ se $c \geq 2$ (dois elementos de $c$ são comparados)
  – O primeiro passo requer necessariamente a manipulação do componente $a$.
  – O caminho mais rápido para levar $a$ até zero requer $\lceil n/2 \rceil$ mudanças de estado e termina com a tupla $(0, n/2, n/2, 0)$ (por meio de comparação dos elementos de $a$ dois a dois).



## Exemplo de Uso de um Oráculo

- A seguir, para reduzir o componente $b$ até um são necessárias $\lceil n/2 \rceil - 1$ mudanças de estado (mínimo de comparações necessárias para obter o maior elemento de $b$).
- Idem para $c$, com $\lceil n/2 \rceil - 1$ mudanças de estado.
- Logo, para obter o estado $(0, 1, 1, n-2)$ a partir do estado $(n, 0, 0, 0)$ são necessárias

$$\lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil - 1 + \lceil n/2 \rceil - 1 = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

comparações. □

- O teorema nos diz que se o número de comparações entre os elementos de um vetor for utilizado como medida de custo, então o algoritmo MaxMin3 é **ótimo**.



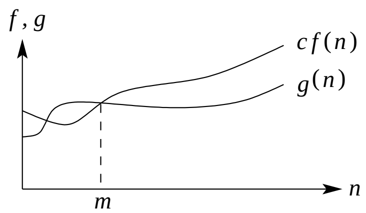
## Comportamento Assintótico de Funções

- O parâmetro $n$ fornece uma medida da dificuldade para se resolver o problema.
- Para valores suficientemente pequenos de $n$, qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes.
- A **escolha do algoritmo** não é um problema crítico para problemas de tamanho pequeno.
- Logo, a análise de algoritmos é realizada para valores grandes de $n$.
- Estuda-se o comportamento assintótico das **funções de custo** (comportamento de suas funções de custo para valores grandes de $n$)
- O comportamento assintótico de $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo quando $n$ cresce.



## Dominação assintótica

- A análise de um algoritmo geralmente conta com apenas algumas operações elementares.
- A medida de custo ou medida de complexidade relata o crescimento assintótico da operação considerada.
- **Definição**: Uma função $f(n)$ **domina assintoticamente** outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas $c$ e $m$ tais que, para $n \geq m$, temos $|g(n)| \leq c \times |f(n)|$.

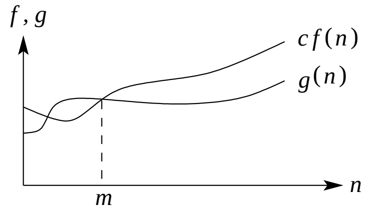



**Exemplo**:

- Sejam $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$.
- As funções $g(n)$ e $f(n)$ dominam assintoticamente uma a outra, desde que $|(n+1)^2| \leq 4|n^2|$ para $n \geq 1$ e $|n^2| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$.

## Notação $O$

- Escrevemos $g(n) = O(f(n))$ para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$. Lê-se $g(n)$ é da ordem no máximo $f(n)$.
- Exemplo: quando dizemos que o tempo de execução $T(n)$ de um programa é $O(n^2)$, significa que existem constantes $c$ e $m$ tais que, para valores de $n \geq m$, $T(n) \leq cn^2$.
- Exemplo gráfico de dominação assintótica que ilustra a notação $O$.




O valor da constante $m$ mostrado é o menor valor possível, mas qualquer valor maior também é válido.

- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existem duas constantes positivas $c$ e $m$ tais que $g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m$.



## Exemplos de Notação $O$

- **Exemplo**: $g(n) = (n+1)^2$.
  - Logo $g(n)$ é $O(n^2)$, quando $m = 1$ e $c = 4$.
  - Isto porque $(n+1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq 1$.
- **Exemplo**: $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$.
  - Sabemos que $g(n)$ é $O(n^2)$, pois para $n \geq 0$, $n \leq n^2$.
  - Entretanto $f(n)$ não é $O(n)$.
  - Suponha que existam constantes $c$ e $m$ tais que para todo $n \geq m$, $n^2 \leq cn$.
  - Logo $c \geq n$ para qualquer $n \geq m$, e não existe uma constante $c$ que possa ser maior ou igual a $n$ para todo $n$.



## Exemplos de Notação $O$

- **Exemplo**: $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$.
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$.
  - A função $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é também $O(n^4)$, entretanto esta afirmação é mais fraca do que dizer que $g(n)$ é $O(n^3)$.
- **Exemplo**: $g(n) = \log_5 n$ é $O(\log n)$.
  - O $\log_b n$ difere do $\log_c n$ por uma constante que no caso é $\log_b c$.
  - Como $n = c^{\log_c n}$, tomando o logaritmo base $b$ em ambos os lados da igualdade, temos que $\log_b n = \log_b c^{\log_c n} = \log_c n \times \log_b c$.



## Operações com a Notação $O$

$$\boxed{\begin{array}{rcll}
f(n) & = & O(f(n)) & \\
c \times O(f(n)) & = & O(f(n)) & c = constante \\
O(f(n)) + O(f(n)) & = & O(f(n)) & \\
O(O(f(n))) & = & O(f(n)) & \\
O(f(n)) + O(g(n)) & = & O(max(f(n), g(n))) & \\
O(f(n))O(g(n)) & = & O(f(n)g(n)) & \\
f(n)O(g(n)) & = & O(f(n)g(n)) &
\end{array}}$$

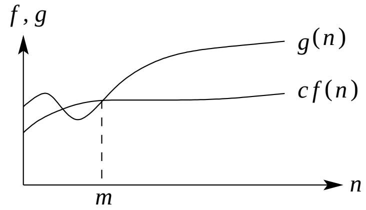
**Exemplo**: regra da soma $O(f(n)) + O(g(n))$.

- Suponha três trechos cujos tempos de execução são $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(n \log n)$.
- O tempo de execução dos dois primeiros trechos é $O(max(n, n^2))$, que é $O(n^2)$.
- O tempo de execução de todos os três trechos é então $O(max(n^2, n \log n))$, que é $O(n^2)$.

**Exemplo**: O produto de $[\log n + k + O(1/n)]$ por $[n + O(\sqrt{n})]$ é $n \log n + kn + O(\sqrt{n} \log n)$.

## Notação $\Omega$

- Especifica um limite inferior para $g(n)$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existirem duas constantes $c$ e $m$ tais que $g(n) \geq cf(n)$, para todo $n \geq m$.
- **Exemplo**: Para mostrar que $g(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$ basta fazer $c = 1$, e então $3n^3 + 2n^2 \geq n^3$ para $n \geq 0$.
- **Exemplo**: Seja $g(n) = n$ para $n$ ímpar $(n \geq 1)$ e $g(n) = n^2/10$ para $n$ par $(n \geq 0)$.
  - Neste caso $g(n)$ é $\Omega(n^2)$, bastando considerar $c = 1/10$ e $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$
- Exemplo gráfico para a notação $\Omega$

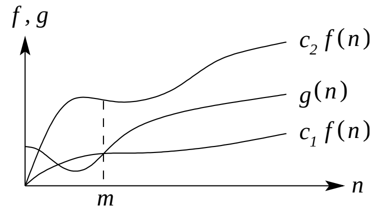



- Para todos os valores à direita de $m$, o valor de $g(n)$ está sobre ou acima do valor de $cf(n)$.



## Notação $\Theta$

- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Theta(f(n))$ se existirem constantes positivas $c_1$, $c_2$ e $m$ tais que $0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$, para todo $n \geq m$.
- Exemplo gráfico para a notação $\Theta$




- Dizemos que $g(n) = \Theta(f(n))$ se existirem constantes $c_1$, $c_2$ e $m$ tais que, para todo $n \geq m$, o valor de $g(n)$ está sobre ou acima de $c_1 f(n)$ e sobre ou abaixo de $c_2 f(n)$.
- Isto é, para todo $n \geq m$, a função $g(n)$ é igual a $f(n)$ a menos de uma constante.
- Neste caso, $f(n)$ é um **limite assintótico firme**.



## Exemplo de Notação $\Theta$

- Seja $g(n) = n^2/3 - 2n$.
- Vamos mostrar que $g(n) = \Theta(n^2)$.
- Temos de obter constantes $c_1$, $c_2$ e $m$ tais que $c_1 n^2 \leq \frac{1}{3}n^2 - 2n \leq c_2 n^2$ para todo $n \geq m$.
- Dividindo por $n^2$ leva a $c_1 \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{n} \leq c_2$.
- O lado direito da desigualdade será sempre válido para qualquer valor de $n \geq 1$ quando escolhemos $c_2 \geq 1/3$.
- Escolhendo $c_1 \leq 1/21$, o lado esquerdo da desigualdade será válido para qualquer valor de $n \geq 7$.
- Logo, escolhendo $c_1 = 1/21$, $c_2 = 1/3$ e $m = 7$, verifica-se que $n^2/3 - 2n = \Theta(n^2)$.
- Outras constantes podem existir, mas o importante é que existe alguma escolha para as três constantes.



## Notação $o$

- Usada para definir um limite superior que não é assintoticamente firme.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $o(f(n))$ se, para qualquer constante $c > 0$, então $0 \leq g(n) < cf(n)$ para todo $n \geq m$.
- **Exemplo**: $2n = o(n^2)$, mas $2n^2 \neq o(n^2)$.
- Em $g(n) = O(f(n))$, a expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para alguma constante $c > 0$, mas em $g(n) = o(f(n))$, a expressão $0 \leq g(n) < cf(n)$ é válida para todas as constantes $c > 0$.
- Na notação $o$, a função $g(n)$ tem um crescimento muito menor que $f(n)$ quando $n$ tende para infinito.
- Alguns autores usam $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ para a definição da notação $o$.

## Notação $\omega$

- Por analogia, a notação $\omega$ está relacionada com a notação $\Omega$ da mesma forma que a notação $o$ está relacionada com a notação $O$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\omega(f(n))$ se, para qualquer constante $c > 0$, então $0 \leq cf(n) < g(n)$ para todo $n \geq m$.
- **Exemplo**: $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$, mas $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$.
- A relação $g(n) = \omega(f(n))$ implica $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$, se o limite existir.



## Classes de Comportamento Assintótico

- Se $f$ é uma **função de complexidade** para um algoritmo $F$, então $O(f)$ é considerada a **complexidade assintótica** ou o comportamento assintótico do algoritmo $F$.
- A relação de dominação assintótica permite comparar funções de complexidade.
- Entretanto, se as funções $f$ e $g$ dominam assintoticamente uma a outra, então os algoritmos associados são equivalentes.
- Nestes casos, o comportamento assintótico não serve para comparar os algoritmos.
- Por exemplo, considere dois algoritmos $F$ e $G$ aplicados à mesma classe de problemas, sendo que $F$ leva três vezes o tempo de $G$ ao serem executados, isto é, $f(n) = 3g(n)$, sendo que $O(f(n)) = O(g(n))$.
- Logo, o comportamento assintótico não serve para comparar os algoritmos $F$ e $G$, porque eles diferem apenas por uma constante.



## Comparação de Programas

- Podemos avaliar programas comparando as funções de complexidade, negligenciando as constantes de proporcionalidade.
- Um programa com tempo de execução $O(n)$ é melhor que outro com tempo $O(n^2)$.
- Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração.
- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - depende do tamanho do problema.
  - Para $n < 50$, o programa com tempo $2n^2$ é melhor do que o que possúi tempo $100n$.
  - Para problemas com entrada de dados pequena é preferível usar o programa cujo tempo de execução é $O(n^2)$.
  - Entretanto, quando $n$ cresce, o programa com tempo de execução $O(n^2)$ leva muito mais tempo que o programa $O(n)$.



## Principais Classes de Problemas

- $f(n) = O(1)$.
  - Algoritmos de complexidade $O(1)$ são ditos de **complexidade constante**.
  - Uso do algoritmo independe de $n$.
  - As instruções do algoritmo são executadas um número fixo de vezes.
- $f(n) = O(\log n)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(\log n)$ é dito ter **complexidade logarítmica**.
  - Típico em algoritmos que transformam um problema em outros menores.
  - Pode-se considerar o tempo de execução como menor que uma constante grande.
  - Quando $n$ é mil, $\log_2 n \approx 10$, quando $n$ é 1 milhão, $\log_2 n \approx 20$.
  - Para dobrar o valor de $\log n$ temos de considerar o quadrado de $n$.
  - A base do logaritmo muda pouco estes valores: quando $n$ é 1 milhão, o $\log_2 n$ é 20 e o $\log_{10} n$ é 6.

## Principais Classes de Problemas

- $f(n) = O(n)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(n)$ é dito ter **complexidade linear**.
  - Em geral, um pequeno trabalho é realizado sobre cada elemento de entrada.
  - É a melhor situação possível para um algoritmo que tem de processar/produzir $n$ elementos de entrada/saída.
  - Cada vez que $n$ dobra de tamanho, o tempo de execução dobra.
- $f(n) = O(n \log n)$.
  - Típico em algoritmos que quebram um problema em outros menores, resolvem cada um deles independentemente e ajuntando as soluções depois.
  - Quando $n$ é 1 milhão, $n\log_2 n$ é cerca de 20 milhões.
  - Quando $n$ é 2 milhões, $n\log_2 n$ é cerca de 42 milhões, pouco mais do que o dobro.



## Principais Classes de Problemas

- $f(n) = O(n^2)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(n^2)$ é dito ter **complexidade quadrática**.
  - Ocorrem quando os itens de dados são processados aos pares, muitas vezes em um anel dentro de outro.
  - Quando $n$ é mil, o número de operações é da ordem de 1 milhão.
  - Sempre que $n$ dobra, o tempo de execução é multiplicado por 4.
  - Úteis para resolver problemas de tamanhos relativamente pequenos.
- $f(n) = O(n^3)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(n^3)$ é dito ter **complexidade cúbica**.
  - Úteis apenas para resolver pequenos problemas.
  - Quando $n$ é 100, o número de operações é da ordem de 1 milhão.
  - Sempre que $n$ dobra, o tempo de execução fica multiplicado por 8.



## Principais Classes de Problemas

- $f(n) = O(2^n)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(2^n)$ é dito ter **complexidade exponencial**.
  - Geralmente não são úteis sob o ponto de vista prático.
  - Ocorrem na solução de problemas quando se usa **força bruta** para resolvê-los.
  - Quando $n$ é 20, o tempo de execução é cerca de 1 milhão. Quando $n$ dobra, o tempo fica elevado ao quadrado.
- $f(n) = O(n!)$.
  - Um algoritmo de complexidade $O(n!)$ é dito ter complexidade exponencial, apesar de $O(n!)$ ter comportamento muito pior do que $O(2^n)$.
  - Geralmente ocorrem quando se usa **força bruta** para na solução do problema.
  - $n = 20 \rightarrow 20! = 2432902008176640000$, um número com 19 dígitos.
  - $n = 40 \rightarrow$ um número com 48 dígitos.



## Comparação de Funções de Complexidade

| Função | Tamanho $n$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| de custo | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| $n$ | 0,00001 s | 0,00002 s | 0,00003 s | 0,00004 s | 0,00005 s | 0,00006 s |
| $n^2$ | 0,0001 s | 0,0004 s | 0,0009 s | 0,0016 s | 0,0.35 s | 0,0036 s |
| $n^3$ | 0,001 s | 0,008 s | 0,027 s | 0,64 s | 0,125 s | 0.316 s |
| $n^5$ | 0,1 s | 3,2 s | 24,3 s | 1,7 min | 5,2 min | 13 min |
| $2^n$ | 0,001 s | 1 s | 17,9 min | 12,7 dias | 35,7 anos | 366 séc. |
| $3^n$ | 0,059 s | 58 min | 6,5 anos | 3855 séc. | $10^8$ séc. | $10^{13}$ séc. |

| Função de custo de tempo | Computador atual | Computador 100 vezes mais rápido | Computador 1.000 vezes mais rápido |
|---|---|---|---|
| $n$ | $t_1$ | $100\ t_1$ | $1000\ t_1$ |
| $n^2$ | $t_2$ | $10\ t_2$ | $31,6\ t_2$ |
| $n^3$ | $t_3$ | $4,6\ t_3$ | $10\ t_3$ |
| $2^n$ | $t_4$ | $t_4 + 6,6$ | $t_4 + 10$ |

## Algoritmos Polinomiais

- **Algoritmo exponencial** no tempo de execução tem função de complexidade $O(c^n), c > 1$.
- **Algoritmo polinomial** no tempo de execução tem função de complexidade $O(p(n))$, onde $p(n)$ é um polinômio.
- A distinção entre estes dois tipos de algoritmos torna-se significativa quando o tamanho do problema a ser resolvido cresce.
- Por isso, os algoritmos polinomiais são muito mais úteis na prática do que os exponenciais.
- Algoritmos exponenciais são geralmente simples variações de pesquisa exaustiva.
- Algoritmos polinomiais são geralmente obtidos mediante entendimento mais profundo da estrutura do problema.
- Um problema é considerado:
  - intratável: se não existe um algoritmo polinomial para resolvê-lo.
  - bem resolvido: quando existe um algoritmo polinomial para resolvê-lo.



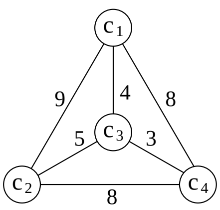
## Algoritmos Polinomiais $\times$ Algoritmos Exponenciais

- A distinção entre algoritmos polinomiais eficientes e algoritmos exponenciais ineficientes possui várias exceções.
- Exemplo: um algoritmo com função de complexidade $f(n) = 2^n$ é mais rápido que um algoritmo $g(n) = n^5$ para valores de $n$ menores ou iguais a 20.
- Também existem algoritmos exponenciais que são muito úteis na prática.
- Exemplo: o algoritmo Simplex para programação linear possui complexidade de tempo exponencial para o pior caso mas executa muito rápido na prática.
- Tais exemplos não ocorrem com freqüência na prática, e muitos algoritmos exponenciais conhecidos não são muito úteis.



## Exemplo de Algoritmo Exponencial

- Um **caixeiro viajante** deseja visitar $n$ cidades de tal forma que sua viagem inicie e termine em uma mesma cidade, e cada cidade deve ser visitada uma única vez.
- Supondo que sempre há uma estrada entre duas cidades quaisquer, o problema é encontrar a menor rota para a viagem.
- A figura ilustra o exemplo para quatro cidades $c_1, c_2, c_3, c_4$, em que os números nos arcos indicam a distância entre duas cidades.




- O percurso $< c_1, c_3, c_4, c_2, c_1 >$ é uma solução para o problema, cujo percurso total tem distância 24.



## Exemplo de Algoritmo Exponencial

- Um algoritmo simples seria verificar todas as rotas e escolher a menor delas.
- Há $(n-1)!$ rotas possíveis e a distância total percorrida em cada rota envolve $n$ adições, logo o número total de adições é $n!$.
- No exemplo anterior teríamos 24 adições.
- Suponha agora 50 cidades: o número de adições seria $50! \approx 10^{64}$.
- Em um computador que executa $10^9$ adições por segundo, o tempo total para resolver o problema com 50 cidades seria maior do que $10^{45}$ séculos só para executar as adições.
- O problema do caixeiro viajante aparece com freqüência em problemas relacionados com transporte, mas também aplicações importantes relacionadas com otimização de caminho percorrido.

## Técnicas de Análise de Algoritmos

- Determinar o tempo de execução de um programa pode ser um problema matemático complexo;
- Determinar a ordem do tempo de execução, sem preocupação com o valor da constante envolvida, pode ser uma tarefa mais simples.
- A análise utiliza técnicas de matemática discreta, envolvendo contagem ou enumeração dos elementos de um conjunto:
  - manipulação de somas,
  - produtos,
  - permutações,
  - fatoriais,
  - coeficientes binomiais,
  - solução de **equações de recorrência**.



## Análise do Tempo de Execução

- Comando de atribuição, de leitura ou de escrita: $O(1)$.
- Seqüência de comandos: determinado pelo maior tempo de execução de qualquer comando da seqüência.
- Comando de decisão: tempo dos comandos dentro do comando condicional, mais tempo para avaliar a condição, que é $O(1)$.
- Anel: soma do tempo de execução do corpo do anel mais o tempo de avaliar a condição para terminação (geralmente $O(1)$), multiplicado pelo número de iterações.
- **Procedimentos não recursivos**: cada um deve ser computado separadamente um a um, iniciando com os que não chamam outros procedimentos. Avalia-se então os que são chamam os já avaliados (utilizando os tempos desses). O processo é repetido até chegar no programa principal.
- **Procedimentos recursivos**: associada uma função de complexidade $f(n)$ desconhecida, onde $n$ mede o tamanho dos argumentos.



## Procedimento não Recursivo

Algoritmo para ordenar os $n$ elementos de um conjunto $A$ em ordem ascendente.

```
    procedure Ordena (var A: Vetor);
    var  i, j, min, x: integer;
    begin
(1)   for i := 1 to n–1 do
        begin
(2)     min := i;
(3)     for j := i+1 to n do
(4)       if A[j] < A[min]
(5)       then min := j;
        { troca A[min] e A[i] }
(6)     x := A[min];
(7)     A[min] := A[i];
(8)     A[i] := x;
        end;
    end;
```

- Seleciona o menor elemento do conjunto.
- Troca este com o primeiro elemento $A[1]$.
- Repita as duas operações acima com os $n-1$ elementos restantes, depois com os $n-2$, até que reste apenas um.



## Análise do Procedimento não Recursivo

Anel Interno

- Contém um comando de decisão, com um comando apenas de atribuição. Ambos levam tempo constante para serem executados.
- Quanto ao corpo do comando de decisão, devemos considerar o pior caso, assumindo que serSS sempre executado.
- O tempo para incrementar o índice do anel e avaliar sua condição de terminação é $O(1)$.
- O tempo combinado para executar uma vez o anel é $O(max(1,1,1)) = O(1)$, conforme regra da soma para a notação $O$.
- Como o número de iterações é $n-i$, o tempo gasto no anel é $O((n-i) \times 1) = O(n-i)$, conforme regra do produto para a notação $O$.

## Análise do Procedimento não Recursivo

Anel Externo

- Contém, além do anel interno, quatro comandos de atribuição. $O(max(1,(n-i),1,1,1)) = O(n-i)$.
- A linha (1) é executada $n-1$ vezes, e o tempo total para executar o programa está limitado ao produto de uma constante pelo **somatório** de $(n-i)$: $\sum_1^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)$
- Considerarmos o número de comparações como a medida de custo relevante, o programa faz $(n^2)/2 - n/2$ comparações para ordenar $n$ elementos.
- Considerarmos o número de trocas, o programa realiza exatamente $n-1$ trocas.



## Procedimento Recursivo

```
    Pesquisa(n);
(1) if n ≤ 1
(2) then 'inspecione elemento' e termine
    else begin
(3)      para cada um dos n elementos 'inspecione elemento';
(4)      Pesquisa(n/3);
         end;
```

- Para cada procedimento recursivo é associada uma função de complexidade $f(n)$ desconhecida, onde $n$ mede o tamanho dos argumentos para o procedimento.
- Obtemos uma equação de recorrência para $f(n)$.
- **Equação de recorrência**: maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função.



## Análise do Procedimento Recursivo

- Seja $T(n)$ uma função de complexidade que represente o número de inspeções nos $n$ elementos do conjunto.
- O custo de execução das linhas (1) e (2) é $O(1)$ e o da linha (3) é exatamente $n$.
- Usa-se uma **equação de recorrência** para determinar o nº de chamadas recursivas.
- O termo $T(n)$ é especificado em função dos termos anteriores $T(1)$, $T(2)$, …, $T(n-1)$.
- $T(n) = n + T(n/3), \;\; T(1) = 1$ (para $n = 1$ fazemos uma inspeção)
- Por exemplo, $T(3) = T(3/3) + 3 = 4$, $T(9) = T(9/3) + 9 = 13$, e assim por diante.
- Para calcular o valor da função seguindo a definição são necessários $k-1$ passos para computar o valor de $T(3^k)$.



## Exemplo de Resolução de Equação de Recorrência

- Sustitui-se os termos $T(k)$, $k < n$, até que todos os termos $T(k)$, $k > 1$, tenham sido substituídos por fórmulas contendo apenas $T(1)$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3 + T(n/3/3/3) \\
&\vdots \\
T(n/3/3\cdots/3) &= n/3/3\cdots/3 + T(n/3\cdots/3)
\end{aligned}$$

- Adicionando lado a lado, temos $T(n) = n + n\cdot(1/3) + n\cdot(1/3^2) + n\cdot(1/3^3) + \cdots + (n/3/3\cdots/3)$ que representa a soma de uma série geométrica de razão $1/3$, multiplicada por $n$, e adicionada de $T(n/3/3\cdots/3)$, que é menor ou igual a 1.

## Exemplo de Resolução de Equação de Recorrência

$T(n) = n + n \cdot (1/3) + n \cdot (1/3^2) + n \cdot (1/3^3) + \cdots +$
$+ (n/3/3 \cdots /3)$

- Se desprezarmos o termo $T(n/3/3 \cdots /3)$, quando $n$ tende para infinito, então $T(n) = n \sum_{i=0}^{\infty} (1/3)^i = n \left( \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{3n}{2}$.
- Se considerarmos o termo $T(n/3/3/3 \cdots /3)$ e denominarmos $x$ o número de subdivisões por 3 do tamanho do problema, então $n/3^x = 1$, e $n = 3^x$. Logo $x = \log_3 n$.
- Lembrando que $T(1) = 1$ temos $T(n) = \sum_{i=0}^{x-1} \frac{n}{3^i} + T(\frac{n}{3^x}) = n \sum_{i=0}^{x-1} (1/3)^i + 1 = \frac{n(1-(\frac{1}{3})^x)}{(1-\frac{1}{3})} + 1 = \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}$.
- Logo, o programa do exemplo é $O(n)$.



## A Linguagem de Programação Pascal

- Os programas apresentados no livro usam apenas as características básicas do Pascal.
- São evitadas as facilidades mais avançadas disponíveis em algumas implementações.
- Não apresentaremos a linguagem na sua totalidade, apenas examinamos algumas características.
- As várias partes componentes de um programa Pascal são:

| | |
|---|---|
| **program** | cabeçalho do programa |
| **label** | declaração de rótulo para **goto** |
| **const** | defi nição de constantes |
| **type** | defi nição de tipos de dados |
| **var** | declaração de variáveis |
| **procedure** ou **function** | declaração de subprogramas |
| **begin** | |
| ⋮ | comandos do programa |
| **end** | |



## Tipos em Pascal

- Regra geral: tornar explícito o tipo associado quando se declara uma constante, variável ou função.
- Isso permite testes de consistência durante o tempo de compilação.
- A definição de tipos permite ao programador alterar o nome de tipos existentes e criar um número ilimitado de outros tipos.
- No caso do Pascal, os tipos podem ser:
  - *simples*,
  - *estruturados* e
  - *apontadores*.



## Tipos Simples

- São grupos de valores indivisíveis (integer, boolean, char e real).
- Tipos simples adicionais podem ser enumerados por meio de:
  - listagem de novos grupos de valores; Exemplo:

    **type** cor = (vermelho, azul, rosa);
    ⋮
    **var** c : cor;
    ⋮
    c := rosa;

  - indicação de subintervalos. Exemplo:

    **type** ano = 1900..1999;
    **type** letra = ’A’..’Z’;
    ⋮
    **var** a : ano;
    **var** b : letra;

    as atribuições a:=1986 e b:=‘B’ são possíveis, mas a:=2001 e b:=7 não o são.

## Tipos Estruturados

- Definem uma coleção de valores simples, ou um agregado de valores de tipos diferentes.
- Existem quatro tipos estruturados primitivos:
  - **Arranjos**: tabela $n$-dimensional de valores homogêneos de qualquer tipo. Indexada por um ou mais tipos simples, exceto o tipo real.
  - **Registros**: união de valores de tipos quaisquer, cujos campos podem ser acessados pelos seus nomes.
  - **Conjuntos**: coleção de todos os subconjuntos de algum tipo simples, com operadores especiais $*$ (interseção), $+$ (união), $-$ (diferença) e $in$ (pertence a) definidos para todos os tipos conjuntos.
  - **Arquivos**: seqüência de valores homogêneos de qualquer tipo. Geralmente é associado com alguma unidade externa.



## Tipo Estruturado Arranjo - Exemplo

```
type cartão  = array [1..80] of char;
type matriz  = array [1..5, 1..5] of real;
type coluna  = array [1..3] of real;
type linha   = array [ano] of char;
type alfa    = packed array [1..n] of char;
type vetor   = array [1..n] of integer;
```

A constante $n$ deve ser previamente declarada

```
const n = 20;
```

Dada a variável

```
var x: coluna;
```

as atribuições x[1]:=0.75, x[2]:=0.85 e x[3]:=1.5 são possíveis.



## Tipo Estruturado Registro - Exemplo

```
type data    = record
                 dia : 1..31;
                 mês : 1..12;
               end;
type pessoa  = record
                 sobrenome     : alfa;
                 primeironome  : alfa;
                 aniversário   : data;
                 sexo          : (m, f);
               end;
```

Declarada a variável

```
var p: pessoa;
```

valores particulares podem ser atribuídos:

```
p.sobrenome       := 'Ziviani';
p.primeironome    := 'Patricia';
p.aniversário.dia := 21;
p.aniversário.mês := 10;
p.sexo            := f;
```



## Tipo Estruturado Conjunto - Exemplo

```
type conjint   = set of 1..9;
type conjcor   = set of cor;
type conjchar  = set of char;
```

O tipo cor deve ser previamente definido

```
type cor = (vermelho, azul, rosa);
```

Declaradas as variáveis

```
var ci : conjint;
var cc : array [1..5] of conjcor;
var ch : conjchar;
```

valores particulares ser construídos e atribuídos:

```
ci     := [1,4,9];
cc[2]  := [vermelho..rosa];
cc[4]  := [ ];
cc[5]  := [azul, rosa];
```

Prioridade: “interseção” precede “união” e “diferença”, que precedem “pertence a”.

| | |
|---|---|
| [1..5,7] $*$ [4,6,8] | é [4] |
| [1..3,5] $+$ [4,6] | é [1..6] |
| [1..3,5] $-$ [2,4] | é [1,3,5] |
| 2 **in** [1..5] | é true |

## Tipo Estruturado Arquivo - Exemplo

**type** arquivopessoal = **file of** Pessoa;

O programa abaixo copia o conteúdo do arquivo Velho no arquivo Novo.

(Atribuição de nomes de arquivos externos ao programa varia de compilador para compilador.)

```
program Copia (Velho, Novo);
{copia o arquivo Velho no arquivo Novo}
type Pessoa = record
                Sobrenome    : alfa;
                PrimeiroNome : alfa;
                Aniversario  : data;
                Sexo         : (m, f);
              end;
var Velho, Novo: file of Pessoa;
    Registro   : Pessoa;
begin
  reset(Velho); rewrite(Novo);
  while not eof(Velho) do
    begin
    read(Velho, Registro);
    write(Novo, Registro);
    end;
end.
```



## Tipo Apontador

- São úteis para criar estruturas de dados **encadeadas**, do tipo listas, árvores e grafos.
- Um apontador é uma variável que referencia outra variável **alocada dinamicamente**.
- Em geral, a variável referenciada é definida como um registro com um apontador para outro elemento do mesmo tipo.

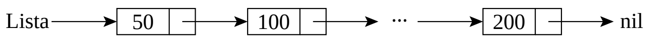
Exemplo:

```
type Apontador = ^No;
type No = record
            Chave: integer
            Apont: Apontador;
          end;
```

Dada uma variável

**var** Lista: Apontador;

é possível criar uma lista como a ilustrada.






## Separador de Comandos

- O **ponto e vírgula** atua como um separador de comandos.
- Quando mal colocado, pode causar erros que não são detectados em tempo de compilação.

Exemplo: o trecho de programa abaixo está sintaticamente correto. Entretanto, o comando de adição serSS executado sempre, e não somente quando o valor da variável $a$ for igual a zero.

```
if a = 0 then;
a := a + 1;
```



## Passagem de Parâmetros

- **Por valor** ou **por variável** (ou **referência**).
- A passagem de parâmetro por variável deve ser utilizada se o valor pode sofrer alteração dentro do procedimento, e o novo valor deve retornar para quem chamou o procedimento.

Exemplo: SomaUm recebe o parâmetro $x$ por valor e o parâmetro $y$ por variável.

```
program Teste;
var a, b: integer;
  procedure SomaUm (x: integer; var y: integer);
  begin
    x := x + 1;    y := y + 1;
    writeln('Procedimento SomaUm: ', x, y);
  end;
begin { Programa principal }
  a := 0;  b := 0;  SomaUm (a,b);
  writeln('Programa principal: ', a, b);
end.
```

Resultado da execução:

```
Procedimento SomaUm : 1  1
Programa principal  : 0  1
```